Attractivity and stability for nonautonomous half-linear differential systems (Progress in Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations)

鬼塚, 政一

数理解析研究所講究録
第 1901 巻 2014 年 55-68

Attractivity and stability for nonautonomous half-linear differential systems

岡山理科大学・理学部　鬼塚　政一
Masakazu Onitsuka
Okayama University of Science
Department of Applied Mathematics

1 序文

2 次元非自励非線形系

$$\begin{cases} x' = -e(t)x + f(t)\phi_{p^*}(y), \\ y' = -g(t)\phi_p(x) - h(t)y \end{cases} \qquad (HS)$$

を考える．ただし，係数 $e(t)$, $f(t)$, $g(t)$ 及び $h(t)$ は連続関数であり，関数 $\phi_q(z)$ を

$$\phi_q(z) = |z|^{q-2}z, \quad q > 1$$

と定義する．また，p と p^* は $(p-1)(p^*-1) = 1$ を満たす値である．このとき，関数 ϕ_{p^*} は ϕ_p の逆関数になる．特に $e(t) \equiv 0$, $f(t) \equiv 1$ のとき，変数変換 $y = \phi_p(x')$ により，方程式系 (HS) は 2 階微分方程式

$$(\phi_p(x'))' + h(t)\phi_p(x') + g(t)\phi_p(x) = 0$$

になる．この方程式の解を $x(t)$ とすれば，関数 ϕ_p が $\phi_p(xy) = \phi_p(x)\phi_p(y)$ を満足することから，$cx(t)$ もまたこの方程式の解になる．すなわち，解の定数倍は解になる．一方，$p = 2$ の場合を除けば，$\phi_p(x+y) \neq \phi_p(x) + \phi_p(y)$ であるから，解の和が解になるとは限らない．したがって，この方程式は線形微分方程式が有する半分の解の性質をもつことから，半分線形微分方程式と呼ばれる．本研究で扱う方程式系 (HS) はこの半分線形微分方程式と同値な方程式系を拡張した方程式系であることから，しばしば半分線形系と呼ばれる (例えば，[5, 6, 12, 15, 16, 17, 18] を参照せよ)．方程式系 (HS) は半分線形微分方程式の様に解の定数倍が解になるとは限らないが，これに類似する良い解の性質をもつ．いま，点 $(t_0, (x_0, y_0))$ を通る方程式系 (HS) の解を $(x(t), y(t))$ とし，$z(t) = cx(t)$, $w(t) = \phi_p(c)y(t)$ とおく．このとき，明らかに $(z(t_0), w(t_0)) = (cx_0, \phi_p(c)y_0)$ である．また

$$z'(t) = cx'(t) = -e(t)cx(t) + f(t)\phi_{p^*}(\phi_p(c)y(t)) = -e(t)z(t) + f(t)\phi_{p^*}(w(t))$$

本研究は日本学術振興会若手研究 (B) 課題番号 23740115 の助成を受けたものである．

かつ

$$w'(t) = \phi_p(c)y'(t) = -g(t)\phi_p(cx(t)) - h(t)\phi_p(c)y(t) = -g(t)\phi_p(z(t)) - h(t)w(t)$$

であるから，$(z(t), w(t))$ は点 $(t_0, (cx_0, \phi_p(c)y_0))$ を通る方程式系 (HS) の解になる．したがって，以下の補題が成り立つ．

補題 1.1. 点 $(t_0, (x_0, y_0))$ を通る方程式系 (HS) の解を $(x(t), y(t))$ とする．このとき，$(cx(t), \phi_p(c)y(t))$ は点 $(t_0, (cx_0, \phi_p(c)y_0))$ を通る方程式系 (HS) の解になる．ただし，$c \in \mathbb{R}$ である．

さらに，方程式系 (HS) の解の初期値問題に関して，以下の関係が成り立つことが分かる．ただし，証明は第 2 節で述べる．

補題 1.2. 時刻 $t_0 \geq 0$ において点 (x_0, y_0) を通る方程式系 (HS) の解を $(x(t), y(t))$ と書き，関数 $\psi(t)$ を

$$\psi(t) = \max\{-pe(t) + |(p-1)f(t) - g(t)|, -p^*h(t) + |f(t) - (p^*-1)g(t)|\}$$

と定義する．このとき，方程式系 (HS) の解 $(x(t), y(t))$ は $t \geq t_0$ において不等式

$$|x(t)|^p + |y(t)|^{p^*} \leq \left(|x_0|^p + |y_0|^{p^*}\right) \exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right) \tag{1.1}$$

を満足する．

補題 1.2 を用いると，係数 $e(t)$, $f(t)$, $g(t)$ 及び $h(t)$ の連続性から，$\psi(t)$ もまた連続関数である．したがって，補題 1.2 における不等式 (1.1) を考慮すれば，方程式系 (HS) のすべての解は時間大域的に存在する．また，不等式 (1.1) より，$(x_0, y_0) = (0, 0)$ を通る解は $(x(t), y(t)) \equiv (0, 0)$ のみである．この解を方程式系 (HS) の零解と呼ぶ．以後，本研究で扱う方程式系 (HS) の零解の近傍における解の性質を定義する．簡単のため，$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ と表し，時刻 $t_0 \geq 0$ において，点 $\mathbf{x}_0$ を通る方程式系 (HS) の解を $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = (x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))$ と表記する．また，$\|\cdot\|$ はユークリッドノルムとする．

定義 1.1. 方程式系 (HS) の零解が**安定**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ と $t_0 \geq 0$ に対して，ある $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ が存在し，$\|\mathbf{x}_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ を満たす任意の $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ とすべての $t \geq t_0$ に対して，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ が成り立つときをいう ([1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 20] を参照)．

定義 1.2. 方程式系 (HS) の零解が**同程度吸収的**であるとは，任意の $t_0 \geq 0$ に対して，ある $\gamma(t_0) > 0$ が存在し，任意の $\eta > 0$ に対して，ある数 $T(t_0, \eta) > 0$ が選べ，$\|\mathbf{x}_0\| < \gamma(t_0)$ を満たす任意の $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ 及び，すべての $t \geq t_0 + T(t_0, \eta)$ に対して，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \eta$ が成り立つときをいう ([1, 11, 13, 20] を参照)．

定義 1.3. 方程式系 (HS) の零解が**同程度漸近安定**であるとは，方程式系 (HS) の零解が同程度吸収的でかつ安定であるときをいう ([1, 11, 13, 20] を参照).

もしも，$p \neq 2$ のとき，原点近傍でヤコビ行列を定義できないので，方程式系 (HS) は線形化できない非線形系となる．一方，$p = 2$ のとき，方程式系 (HS) は 2 次元線形系

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} -e(t) & f(t) \\ -g(t) & -h(t) \end{pmatrix} \tag{LS}$$

になる．ただし，$\mathbf{x} = {}^t(x, y)$ である．線形系の零解の安定性の問題は古くから研究がなされ，関連する研究は膨大である．単に種々の科学への応用が多いだけでなく，その解空間に線形性が保たれることから，解析し易いことが理由として挙げられる．着目すべきは，線形系に対しては基本解行列を考察することが出来るという事実である．基本解行列とは，線形系の互いに独立な解を基底とする行列解のことをいう．基本解行列が求まれば，線形系の一般解を構成することができ，厳密な解析が可能になる (詳しくは，書籍 [1, 3, 4, 9, 14, 20] を参照せよ)．この基本解行列を解析することで，種々の安定性について様々な良い性質が知られている．例えば，方程式系 (LS) の零解が同程度吸収的であるとことと**吸収的**であること，すなわち，任意の $t_0 \geq 0$ に対して，ある $\gamma(t_0) > 0$ が存在し，$\|\mathbf{x}_0\| < \gamma(t_0)$ を満たす任意の $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ と任意の $\eta > 0$ に対して，ある数 $T(t_0, \mathbf{x}_0, \eta) > 0$ が選べ，すべての $t \geq t_0 + T(t_0, \mathbf{x}_0, \eta)$ に対して，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \eta$ であることが同値である．また，零解が吸収的でかつ安定であるとき，零解は**漸近安定**と呼ばれる．吸収的と同程度吸収的の差異は $T > 0$ が初期値 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ への依存を許すか否かである．定義より明らかに，零解が同程度吸収的ならば，吸収的であることが成り立つが，本来その逆は成り立たない．例えば，Massera [11] を参照せよ．しかしながら，線形系に限ればその逆が成り立つことになり，同程度吸収性と吸収性は同値である．さらに，以下の事実が知られている．

定理 A. 線形系 (LS) の零解が同程度吸収的であるならば，その零解は安定である．すなわち，線形系 (LS) の零解は同程度漸近安定である．

線形系の場合に限りこの事実を別の言葉で言い換えると，零解が吸収的であるならば，その零解は安定である．ところが一般に，非線形系においては，零解の吸収性と零解の安定性の間には包含関係は成立しない．例えば，Vinograd [7, 19] の例

$$x' = \frac{x^2(y-x)+y^5}{(x^2+y^2)\{1+(x^2+y^2)^2\}}, \quad y' = \frac{y^2(y-2x)}{(x^2+y^2)\{1+(x^2+y^2)^2\}}$$

が良く知られている．この非線形微分方程式系は原点を唯一の平衡点としてもち，零解は吸収的であるが安定ではない．したがって，線形系と非線形系の零解の性質には大きな隔たりがあり，非線形系において (同程度) 吸収性や安定性の間には包含関係は成立しないことは明らかである．

さて，本研究で扱う方程式系 (HS) は $p=2$ の場合に線形系 (LS) と一致するが，$p\neq 2$ の場合，非線形系である．線形系に関連するこれまでの多くの研究においては，基本解行列を用いた解析手法に依るところが大きい．しかしながらその手法は，行列解が扱える線形系の枠を出ることは許されず，非線形系の解の漸近的挙動を考察するうえでは無力である．しかしながら，本研究で扱う方程式系 (HS) はある特別な場合，線形系と一致することから，その解の構造は線形系のそれとよく類似していると予想される．それでは，方程式系 (HS) の零解が同程度吸収的であれば，その零解は安定であるのか?この疑問に答えるのが本研究の第 1 の目的である．すなわち，非線形系である方程式系 (HS) に対しても定理 A に類する結果が得られるのではないかと着想した．以下にその答えとなる本研究で得られた成果を与える．

定理 1.1. 方程式系 (HS) の零解が同程度吸収的であるならば，その零解は安定である．すなわち，方程式系 (HS) の零解は同程度漸近安定である．

次節では，補題 1.2 及び定理 1.1 の証明を与える．第 3 節では，方程式系 (HS) の零解の近傍の性質と遠方の性質について考察する．特に，線形系において同程度吸収性と大域同程度吸収性が同値な関係にある事実に着目し，第 2 の目的として，方程式系 (HS) においても線形系のそれと類似の結果が得られることを明らかにする (大域同程度吸収性の定義については，第 3 節に記載する)．第 4 節においては，零解が大域的同程度漸近安定であるための十分条件及び必要条件を与える．また，ある特別な場合における方程式系 (HS) の零解が大域的同程度漸近安定であるための必要かつ十分条件を与える (大域的同程度漸近安定の定義については，第 3 節に記載する)．

2 補題と主定理の証明

本節では，補題 1.2 及び主定理の証明を与える．まず，補題 1.2 の証明に入る前に，Young の不等式 ([5, 6] を参照) と呼ばれる不等式を以下に紹介する．

補題 2.1. 実数 X, Y に対して，不等式

$$\frac{|X|^p}{p} - XY + \frac{|Y|^{p^*}}{p^*} \geq 0$$

が成り立つ．ただし，$(p-1)(p^*-1)=1$ かつ $p>1$ である．

次に，この補題とリヤプノフの直接法を用いて，補題 1.2 の証明を行う．

補題 1.2 の証明. 点 $(t_0,(x_0,y_0))$ を通る方程式系 (HS) の解を $(x(t),y(t))$ とおく．関数 $v(t)$ を $v(t)=|x(t)|^p+|y(t)|^{p^*}$ と定義すれば，$t\geq t_0$ に対して

$$\begin{aligned} v'(t) &= p\phi_p(x(t))x'(t) + p^*\phi_{p^*}(y(t))y'(t) \\ &= -pe(t)|x(t)|^p + (pf(t)-p^*g(t))\phi_p(x(t))\phi_{p^*}(y(t)) - p^*h(t)|y(t)|^{p^*} \qquad (2.1) \end{aligned}$$

である．よって，補題 2.1 より，$t \geq t_0$ に対して

$$
\begin{aligned}
v'(t) &\leq -pe(t)|x(t)|^p - p^*h(t)|y(t)|^{p^*} + |pf(t) - p^*g(t)||x(t)|^{p-1}|y(t)|^{p^*-1} \\
&\leq -pe(t)|x(t)|^p - p^*h(t)|y(t)|^{p^*} + |pf(t) - p^*g(t)| \left(\frac{|x(t)|^{(p-1)p^*}}{p^*} + \frac{|y(t)|^{(p^*-1)p}}{p} \right) \\
&= \left(-pe(t) + |(p-1)f(t) - g(t)|\right)|x(t)|^p + \left(-p^*h(t) + |f(t) - (p^*-1)g(t)|\right)|y(t)|^{p^*} \\
&\leq \psi(t)\left(|x(t)|^p + |y(t)|^{p^*}\right) = \psi(t)v(t)
\end{aligned}
$$

となる．この不等式の両辺に $\exp\left(-\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right)$ を掛けると，$t \geq t_0$ において

$$
\left(\exp\left(-\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right) v(t)\right)' \leq 0
$$

を得る．両辺を t_0 から t まで積分すれば，$t \geq t_0$ に対して

$$
v(t) \leq v(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right) = \left(|x_0|^p + |y_0|^{p^*}\right)\exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right)
$$

である．すなわち，不等式 (1.1) が成り立つ． □

第 1 節で述べたように，不等式 (1.1) を考慮すれば，方程式系 (HS) のすべての解は時間大域的に存在し，零解の一意性もまた保証される．以後，補題 1.1 と 1.2 を用いて主定理の証明を与える．

定理 1.1 の証明. 方程式系 (HS) の零解が同程度吸収的であるから，任意の $t_0 \geq 0$ に対して，ある $\gamma(t_0) > 0$ と $T(t_0, 1) > 0$ が選べ，$\|\mathbf{x}_0\| < \gamma(t_0)$ をみたす任意の $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 及び，すべての $t \geq t_0 + T(t_0, 1)$ に対して，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < 1$ である．簡単のため

$$
x(t) = x(t; t_0, x_0, y_0), \quad y(t) = y(t; t_0, x_0, y_0)
$$

と書く．また，関数 $\psi(t)$ を

$$
\psi(t) = \max\{-pe(t) + |(p-1)f(t) - g(t)|, -p^*h(t) + |f(t) - (p^*-1)g(t)|\}
$$

と定めると，関数 $\psi(t)$ は $t \geq t_0$ において連続であるから，閉区間 $[t_0, t_0 + T(t_0, 1)]$ 上で有界である．したがって，$t_0 \leq t \leq t_0 + T(t_0, 1)$ に対して，$\psi(t) \leq K(t_0)$ を満たす $K(t_0) > 0$ を選ぶことができる．よって，補題 1.2 より，$t_0 \leq t \leq t_0 + T(t_0, 1)$ において，不等式

$$
\begin{aligned}
|x(t)|^p + |y(t)|^{p^*} &\leq \left(|x_0|^p + |y_0|^{p^*}\right)\exp\left(K(t_0)\int_{t_0}^t ds\right) = \left(|x_0|^p + |y_0|^{p^*}\right)e^{K(t_0)(t-t_0)} \\
&< \left(\gamma(t_0)^p + \gamma(t_0)^{p^*}\right)e^{K(t_0)(t-t_0)} \leq \left(\gamma(t_0)^p + \gamma(t_0)^{p^*}\right)e^{K(t_0)T(t_0,1)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，この不等式は閉区間 $[t_0, t_0+T(t_0,1)]$ 上でのみ成立することに注意する．いま

$$L(t_0) = \sqrt{2}\max\left\{1, \left(\gamma(t_0)^p + \gamma(t_0)^{p^*}\right) e^{K(t_0)T(t_0,1)}\right\}$$

と置けば，$1 < L(t_0)/\sqrt{2}$ であるから，$t \geq t_0$ に対して

$$|x(t)| < \left(\frac{L(t_0)}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{L(t_0)}{\sqrt{2}} \quad \text{かつ} \quad |y(t)| < \left(\frac{L(t_0)}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{p^*}} < \frac{L(t_0)}{\sqrt{2}}$$

が分かる．よって，$t \geq t_0$ において

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < L(t_0) \tag{2.2}$$

を得る．

以後，(a) $1 < p < 2$ と (b) $p \geq 2$ に場合分けして証明を与える．まず，(a) $1 < p < 2$ の場合を考える．任意の $0 < \varepsilon < 1$ と任意の $t_0 \geq 0$ に対して

$$\delta(t_0, \varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{L(t_0)}\right)^{p^*-1} \gamma(t_0)$$

とする．ただし，$\gamma(t_0)$ は第一パラグラフで定めた値である．任意の $t_0 \geq 0$ 及び $\|\mathbf{x}_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ を満足する任意の $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ から始まる方程式系 (HS) の解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = (x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))$ を考える．いま

$$z(t) = \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{p^*-1} x(t; t_0, x_0, y_0), \quad w(t) = \frac{L(t_0)}{\varepsilon} y(t; t_0, x_0, y_0)$$

と置けば，補題 1.1 より，$(z(t), w(t))$ は初期条件

$$(z(t_0), w(t_0)) = \left(\left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{p^*-1} x_0, \frac{L(t_0)}{\varepsilon} y_0\right)$$

を満足する方程式系 (HS) の解になる．$1 < p < 2$ かつ $\sqrt{2} < L(t_0) < L(t_0)/\varepsilon$ であるから

$$\left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^2 < \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{2(p^*-1)}$$

に注意すると，$\|\mathbf{x}_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ より

$$\begin{aligned}
\|(z(t_0), w(t_0))\| &= \sqrt{\left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{2(p^*-1)} x_0^2 + \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^2 y_0^2} \leq \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{p^*-1} \|\mathbf{x}_0\| \\
&< \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{p^*-1} \delta(t_0, \varepsilon) = \gamma(t_0)
\end{aligned}$$

である．このとき，不等式 (2.2) が成り立つので，任意の $t \geq t_0$ に対して，不等式

$$L(t_0) > \|(z(t), w(t))\| = \sqrt{\left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{2(p^*-1)} x^2(t; t_0, x_0, y_0) + \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^2 y^2(t; t_0, x_0, y_0)}$$
$$\geq \frac{L(t_0)}{\varepsilon} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|$$

が成り立ち，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ である．よって，$1 < p < 2$ のとき，方程式系 (HS) の零解は安定である．

次に，(b) $p \geq 2$ の場合を考える．任意の $0 < \varepsilon < 1$ と任意の $t_0 \geq 0$ に対して

$$\delta(t_0, \varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{L(t_0)}\right)^{p-1} \gamma(t_0)$$

と定める．任意の $t_0 \geq 0$ 及び $\|\mathbf{x}_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ を満足する任意の $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ から始まる方程式系 (HS) の解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = (x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))$ を考える．いま

$$z(t) = \frac{L(t_0)}{\varepsilon} x(t; t_0, x_0, y_0), \quad w(t) = \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{p-1} y(t; t_0, x_0, y_0)$$

と置けば，補題 1.1 より，$(z(t), w(t))$ は初期条件

$$(z(t_0), w(t_0)) = \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon} x_0, \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{p-1} y_0\right)$$

を満足する方程式系 (HS) の解になる．$p \geq 2$ かつ $\sqrt{2} < L(t_0) < L(t_0)/\varepsilon$ であるから

$$\left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^2 \leq \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{2(p-1)}$$

に注意すると，$\|\mathbf{x}_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ より

$$\|(z(t_0), w(t_0))\| = \sqrt{\left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^2 x_0^2 + \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{2(p-1)} y_0^2} \leq \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{p-1} \|\mathbf{x}_0\|$$
$$< \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{p-1} \delta(t_0, \varepsilon) = \gamma(t_0)$$

である．このとき，不等式 (2.2) が成り立つので，任意の $t \geq t_0$ に対して，不等式

$$L(t_0) > \|(z(t), w(t))\| = \sqrt{\left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^2 x^2(t; t_0, x_0, y_0) + \left(\frac{L(t_0)}{\varepsilon}\right)^{2(p-1)} y^2(t; t_0, x_0, y_0)}$$
$$\geq \frac{L(t_0)}{\varepsilon} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|$$

が成り立ち，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ である．よって，$p \geq 2$ のときもまた，方程式系 (HS) の零解は安定である．定理 1.1 の証明終わり． $\square$

3 局所同程度吸収性と大域同程度吸収性

第 3 節では，方程式系 (HS) の零解の遠方からはじまる解の性質について考察する．(同程度) 吸収性，安定性，(同程度) 漸近安定性はそれらの定義からも明らかなように，何れも零解の近傍における解の性質である．例えば，零解の安定性との対比のため，これと類似する零解の遠方からはじまる解の性質として，解の有界性が挙げられることが多い．この 2 つの性質に対して，零解の安定性をリヤプノフ安定性，解の有界性をラグランジュ安定性と分類することもある．原点近傍の局所的な理論と遠方の大域的な理論の違いを明確にする例として，スカラーの非線形微分方程式 $x' = x(x-1)$ を考える．この方程式の (t_0, x_0) を通る解は

$$x(t; t_0, x_0) = \frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{t-t_0}}$$

で与えられる．明らかに，2 つの自明解 $x(t; t_0, 0) \equiv 0$ 及び $x(t; t_0, 1) \equiv 1$ をもつ．もしも，$x_0 < 1$ の場合，$t \to \infty$ のとき，$x(t; t_0, x_0) \to 0$ をみたすことから，零解は吸収的である．一方，$1 < x_0$ の場合，$t \to t_0 + \log x_0/(x_0 - 1)$ のとき，$x(t; t_0, x_0) \to \infty$ であるから，解は非有界になる．以上の事から，局所的な解の性質と大域的な解の性質はまったく異なる性質と言える．

本研究では特に，同程度吸収性や同程度漸近安定性に興味があるため，これらとの対比のため以下の性質について議論する．

定義 3.1. 方程式系 (HS) の零解が**大域同程度吸収的**であるとは，任意の $t_0 \geq 0$ と任意の $\alpha > 0$ 及び任意の $\eta > 0$ に対して，ある数 $T(t_0, \alpha, \eta) > 0$ が選べ，$\|\mathbf{x}_0\| < \alpha$ を満たす任意の $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ 及びすべての $t \geq t_0 + T(t_0, \alpha, \eta)$ に対して，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \eta$ が成り立つときをいう ([1, 11, 13, 20] を参照).

定義 3.2. 方程式系 (HS) の零解が**大域的同程度漸近安定**であるとは，その零解が大域同程度吸収的でかつ安定であるときをいう ([1, 11, 13, 20] を参照).

特に，大域同程度吸収的の定義における $T > 0$ が初期値 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ への依存を許すとき，零解は**大域吸収的**と呼ばれる．すなわち，任意の初期時刻 $t_0 \geq 0$ と $\mathbb{R}^2$ 上の任意の初期値 $\mathbf{x}_0$ からはじまるすべての解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ が零解に漸近するとき，零解は大域吸収的という．また，零解が大域吸収的であり安定であるとき，**大域的漸近安定**と呼ばれる．明らかに，零解が大域同程度吸収的であるならば，零解は大域吸収的であるが，一般にその逆は成り立たない．しかしながら，第 1 節で述べたように，線形系に限ればこれら 2 つの性質は同値な関係になることが知られている．また，零解が大域同程度吸収的であるならば，零解は (局所) 同程度吸収的である．ところが，上述の例にあるように，この関係に対しても逆の関係は成立せず，(局所) 同程度吸収的であるからといって大域同程度吸収的であるとは限らない．実は，線形系に限れば，以下の事実が知られている．

定理 3.1. 方程式系 (HS) の零解が同程度吸収的ならば，その零解は大域同程度吸収的である．

証明. 方程式系 (HS) の同程度吸収性より，任意の $t_0 \geq 0$ に対して，ある $\gamma(t_0) > 0$ が存在し，任意の $\eta > 0$ に対して，ある数 $T(t_0, \eta) > 0$ が選べ，$\|\xi\| < \gamma(t_0)$ を満たす任意の $\xi \in \mathbb{R}^2$ とすべての $t \geq t_0 + T(t_0, \eta)$ に対して，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \xi)\| < \eta$ が成り立つ．

以後，(a) $1 < p < 2$ と (b) $p \geq 2$ に場合分けして証明を与える．まず，(a) $1 < p < 2$ の場合を考える．いま，任意の $\alpha \geq \gamma(t_0)$ に対して，$\gamma(t_0) \leq \|\mathbf{x}_0\| \leq \alpha$ を満たす任意の初期値 $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ から始まる方程式系 (HS) の解を $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = (x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))$ と書く．また

$$\|\mathbf{x}_0\| = \|(x_0, y_0)\|, \quad \mathbf{y}_0 = \left(\left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{p^*-1} x_0, \frac{\gamma(t_0)}{2\alpha} y_0\right)$$

と定める．$1 < p < 2$ より，$p^* - 1 > 1$ であるので

$$\left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{p^*-1} < \frac{\gamma(t_0)}{2\alpha} \leq \frac{1}{2}$$

に注意すると

$$\|\mathbf{y}_0\| = \sqrt{\left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{2(p^*-1)} x_0^2 + \left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^2 y_0^2} \leq \frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\|\mathbf{x}_0\| \leq \frac{\gamma(t_0)}{2} < \gamma(t_0) \tag{3.1}$$

が成り立つ．また，補題 1.1 より

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \left(\left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{p^*-1} x(t; t_0, x_0, y_0), \frac{\gamma(t_0)}{2\alpha} y(t; t_0, x_0, y_0)\right)$$

は方程式系 (HS) の解になる．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\eta = \left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{p^*-1} \varepsilon > 0$$

とすれば，(3.1) と本証明の第一パラグラフの事実より，すべての $t \geq t_0 + T(t_0, \eta)$ に対して

$$\begin{aligned}
\eta &> \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| \\
&= \sqrt{\left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{2(p^*-1)} x^2(t; t_0, x_0, y_0) + \left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^2 y^2(t; t_0, x_0, y_0)} \\
&\geq \left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{p^*-1} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|
\end{aligned}$$

が分かるので，$t \geq t_0 + T(t_0, \eta)$ において

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \left(\frac{2\alpha}{\gamma(t_0)}\right)^{p^*-1} \eta = \varepsilon$$

である．ここで，η は t_0, α 及び ε のみに依存して決まるので，$T(t_0, \eta)$ は t_0, α 及び ε のみに依存して決まる．よって，方程式系 (HS) の零解は大域同程度吸収的である．

次に，(b) $p \geq 2$ の場合を考える．いま，任意の $\alpha \geq \gamma(t_0)$ に対して，$\gamma(t_0) \leq \|\mathbf{x}_0\| \leq \alpha$ を満たす任意の初期値 $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ から始まる方程式系 (HS) の解を $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = (x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))$ と書く．また

$$\|\mathbf{x}_0\| = \|(x_0, y_0)\|, \quad \mathbf{y}_0 = \left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha} x_0, \left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{p-1} y_0\right)$$

と定める．$p \geq 2$ より

$$\left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{p-1} \leq \frac{\gamma(t_0)}{2\alpha} \leq \frac{1}{2}$$

に注意すると

$$\|\mathbf{y}_0\| = \sqrt{\left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^2 x_0^2 + \left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{2(p-1)} y_0^2} \leq \frac{\gamma(t_0)}{2\alpha} \|\mathbf{x}_0\| \leq \frac{\gamma(t_0)}{2} < \gamma(t_0) \tag{3.2}$$

が成り立つ．また，補題 1.1 より

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha} x(t; t_0, x_0, y_0), \left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{p-1} y(t; t_0, x_0, y_0)\right)$$

は方程式系 (HS) の解になる．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\eta = \left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{p-1} \varepsilon > 0$$

とすれば，(3.2) と本証明の第一パラグラフの事実より，すべての $t \geq t_0 + T(t_0, \eta)$ に対して

$$\begin{aligned}
\eta &> \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| \\
&= \sqrt{\left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^2 x^2(t; t_0, x_0, y_0) + \left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{2(p-1)} y^2(t; t_0, x_0, y_0)} \\
&\geq \left(\frac{\gamma(t_0)}{2\alpha}\right)^{p-1} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|
\end{aligned}$$

が分かるので，$t \geq t_0 + T(t_0, \eta)$ において

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \left(\frac{2\alpha}{\gamma(t_0)}\right)^{p-1} \eta = \varepsilon$$

である．ここで，η は t_0, α 及び ε のみに依存して決まるので，$T(t_0,\eta)$ は t_0, α 及び ε のみに依存して決まる．よって，方程式系 (HS) の零解は大域同程度吸収的である．定理 3.1 の証明終わり． □

定理 3.1 の証明と同様の議論を行うことにより，以下の定理が成り立つ．

定理 3.2. 方程式系 (HS) の零解が吸収的ならば，その零解は大域吸収的である．

さらに，定理 1.1 及び定理 3.1（もしくは，定理 3.2）を組み合わせれば，以下の結果は明らかである．

定理 3.3. 方程式系 (HS) の零解が同程度吸収的ならば，その零解は大域的同程度漸近安定（もしくは，大域的漸近安定）である．

4 大域的同程度漸近安定性

第 4 節では，これまで得られた成果を利用して，方程式系 (HS) の零解が大域的同程度漸近安定であるための十分条件及び必要条件を与える．さらに，係数が限定的な場合における程式系 (HS) の零解が大域的同程度漸近安定であるための十分条件及び必要条件を与える

定理 4.1. 関数 $\psi(t)$ を

$$\psi(t) = \max\{-pe(t) + |(p-1)f(t) - g(t)|\,, -p^*h(t) + |f(t) - (p^*-1)g(t)|\}$$

と定義する．このとき

$$\int_0^\infty \psi(t)dt = -\infty$$

ならば，方程式系 (HS) の零解は大域的（同程度）漸近安定である．

証明. 任意の $t_0 \geq 0$ に対して，$\gamma(t_0) = 1$ と定める．仮定より，任意の $0 < \eta < 1$ に対して，ある $T(t_0,\eta) > 0$ が選べ，$t \geq t_0 + T(t_0,\eta)$ において

$$\int_0^t \psi(s)ds < \int_0^{t_0} \psi(s)ds + \log\frac{\eta}{2}$$

が成り立つ．$t_0 \geq 0$ を初期時刻とし，$\|\mathbf{x}_0\| < \gamma(t_0)$ を満たす任意の $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ を初期値とする方程式系 (HS) の解 $(x(t), y(t))$ を考えると，補題 1.2 より，不等式 (1.1) が成り立つ．したがって，$t \geq t_0 + T(t_0,\eta)$ において

$$\begin{aligned}|x(t)|^p + |y(t)|^{p^*} &\leq \left(|x_0|^p + |y_0|^{p^*}\right)\exp\left(\int_0^t \psi(s)ds - \int_0^{t_0}\psi(s)ds\right)\\ &< \left(|x_0|^p + |y_0|^{p^*}\right)\frac{\eta}{2} < \eta\end{aligned}$$

が得られる．明らかに，方程式系 (HS) の零解は同程度吸収的である．よって，定理 3.3 を用いれば，方程式系 (HS) の零解は大域的同程度漸近安定である． □

方程式系 (HS) の零解が大域的同程度漸近安定であるための必要条件を与える前に，準備として以下の補題を与える．

補題 4.1. 時刻 $t_0 \geq 0$ において点 (x_0, y_0) を通る方程式系 (HS) の解を $(x(t), y(t))$ と書き，関数 $\omega(t)$ を

$$\omega(t) = \min\{-pe(t) - |(p-1)f(t) - g(t)|\,, -p^*h(t) - |f(t) - (p^*-1)g(t)|\}$$

と定義する．このとき，方程式系 (HS) の解 $(x(t), y(t))$ は $t \geq t_0$ において不等式

$$|x(t)|^p + |y(t)|^{p^*} \geq \left(|x_0|^p + |y_0|^{p^*}\right) \exp\left(\int_{t_0}^t \omega(s)ds\right)$$

を満足する．

Proof. 点 $(t_0, (x_0, y_0))$ を通る方程式系 (HS) の解を $(x(t), y(t))$ とおく．関数 $v(t)$ を $v(t) = |x(t)|^p + |y(t)|^{p^*}$ と定義すれば，$t \geq t_0$ に対して

$$\begin{aligned}
v'(t) &= p\phi_p(x(t))x'(t) + p^*\phi_{p^*}(y(t))y'(t) \\
&= -pe(t)|x(t)|^p + (pf(t) - p^*g(t))\phi_p(x(t))\phi_{p^*}(y(t)) - p^*h(t)|y(t)|^{p^*}
\end{aligned}$$

である．よって，補題 2.1 より，$t \geq t_0$ に対して

$$\begin{aligned}
v'(t) &\geq -pe(t)|x(t)|^p - p^*h(t)|y(t)|^{p^*} - |pf(t) - p^*g(t)||x(t)|^{p-1}|y(t)|^{p^*-1} \\
&\geq -pe(t)|x(t)|^p - p^*h(t)|y(t)|^{p^*} - |pf(t) - p^*g(t)|\left(\frac{|x(t)|^{(p-1)p^*}}{p^*} + \frac{|y(t)|^{(p^*-1)p}}{p}\right) \\
&= \left(-pe(t) - |(p-1)f(t) - g(t)|\right)|x(t)|^p + \left(-p^*h(t) - |f(t) - (p^*-1)g(t)|\right)|y(t)|^{p^*} \\
&\geq \omega(t)\left(|x(t)|^p + |y(t)|^{p^*}\right) = \omega(t)v(t)
\end{aligned}$$

となる．この不等式の両辺に $\exp\left(-\int_{t_0}^t \omega(s)ds\right)$ を掛けると，$t \geq t_0$ において

$$\left(\exp\left(-\int_{t_0}^t \omega(s)ds\right)v(t)\right)' \geq 0$$

を得る．両辺を t_0 から t まで積分すれば，$t \geq t_0$ に対して

$$v(t) \geq v(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \omega(s)ds\right) = \left(|x_0|^p + |y_0|^{p^*}\right)\exp\left(\int_{t_0}^t \omega(s)ds\right)$$

である．証明終わり． □

定理 4.2. 関数 $\omega(t)$ を

$$\omega(t) = \min\{-pe(t) - |(p-1)f(t) - g(t)|\,, -p^*h(t) - |f(t) - (p^*-1)g(t)|\}$$

と定義する．このとき，方程式系 (HS) の零解が同程度吸収的であるならば

$$\int_0^\infty \omega(t)dt = -\infty.$$

証明. 方程式系 (HS) の零解が同程度吸収的であるから，$t \to \infty$ のとき，$|x(t)|^p + |y(t)|^{p^*} \to 0$ である．したがって，補題 4.1 より，明らかに

$$\int_0^t \omega(s)dt = \int_0^{t_0} \omega(s)ds + \int_{t_0}^t \omega(s)ds \to -\infty$$

が成り立つ． $\square$

もしも，方程式系 (HS) において，$(p-1)e(t) \equiv h(t)$, $(p-1)f(t) \equiv g(t)$ であれば

$$\psi(t) = \max\{-pe(t) - |(p-1)f(t) - g(t)|, -p^*h(t) - |f(t) - (p^*-1)g(t)|\} = -pe(t)$$

かつ

$$\omega(t) = \min\{-pe(t) - |(p-1)f(t) - g(t)|, -p^*h(t) - |f(t) - (p^*-1)g(t)|\} = -pe(t)$$

であるから，定理 4.1 及び 4.2 から，次の定理が得られる．

定理 4.3. 関係式 $(p-1)e(t) \equiv h(t)$, $(p-1)f(t) \equiv g(t)$ が成り立つとき，方程式系 (HS) の零解が大域的同程度漸近安定であるための必要かつ十分条件は

$$\int_0^\infty e(t)dt = \infty$$

である．

参考文献

[1] A. Bacciotti and L. Rosier, *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*, 2nd ed., Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[2] T.A. Burton, *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, 178, Academic Press, Orlando, San Diego, New York, 1985.

[3] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, 3rd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 16, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.

[4] W. A. Coppel, *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, D. C. Heath and Co., Boston, Mass., 1965.

[5] O. Došlý. *Half-linear differential equations*, Handbook of differential equations, 161–357, Elsevier, Amsterdam, 2004.

[6] O. Došlý and P. Řehák, *Half-linear differential equations*, North-Holland Mathematics Studies 202, Elsevier, Amsterdam, 2005.

[7] W. Hahn, *Stability of motion*, Translated from the German manuscript by Arne P. Baartz. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 138, Springer-Verlag, New York, 1967.

[8] A. Halanay, *Differential Equations*: Stability, Oscillations, Time Lags, Academic Press, New York, London, 1966.

[9] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Pure and Applied Mathematics **11**, Wiley-Interscience, New York-London-Sydney, 1969.

[10] J. P. LaSalle, *The stability and control of discrete processes*, Applied Mathematical Sciences **62**, Springer-Verlag, New York, 1986.

[11] J. L. Massera, On Liapounoff's conditions of stability, Ann. of Math. (2) 50 (1949), 705–721.

[12] M. Onitsuka and J. Sugie, Uniform global asymptotic stability for half-linear differential systems with time-varying coefficients, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Sect A, 141 (5) (2011), 1083–1101.

[13] N. Rouche, P. Habets and M. Laloy, *Stability theory by Liapunov's direct method.* Applied Mathematical Sciences, Vol. 22. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[14] G. Sansone and R. Conti, *Non-linear differential equations*, Revised ed., Translated from the Italian by Ainsley H. Diamond. International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics 67, A Pergamon Press Book, The Macmillan Co., New York, 1964.

[15] J. Sugie, S. Hata and M. Onitsuka, Global attractivity for half-linear differential systems with periodic coefficients, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 371 (1) (2010), 95–112.

[16] J. Sugie and M. Onitsuka, Global asymptotic stability for damped half-linear differential equations, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 73 (3–4) (2007), 613–636.

[17] J. Sugie and M. Onitsuka, Global asymptotic stability for half-linear differential systems with coefficients of indefinite sign, Archivum Mathematicum (Brno), 44 (4) (2008), 317–334.

[18] J. Sugie and M. Onitsuka, Growth conditions for uniform asymptotic stability of damped oscillators, Nonlinear Anal. 98 (2014), 83–103.

[19] R. È. Vinograd and D. M. Grobman, On problems of Frommer differentiation, (Russian) Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 12 (1957), no. 5 (77), 191–195.

[20] T. Yoshizawa, *Stability theory by Liapunov's second method*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.